

# Chi – Quadrat – Test und Assoziationsmaß

## – Lösungshinweis –

*Hinweis: Im Rahmen von diesem Arbeitsblatt werden Einflussfaktoren und Limitationen des Chi-Quadrat-Tests erarbeitet und ein Zusammenhang zwischen dem Chi-Quadrat-Test und dem Assoziationsmaß hergestellt.*

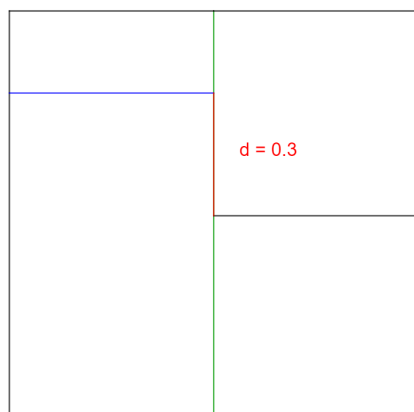
Die Firma Lichtox wirbt damit, dass Ihre Glühlampen eine Lebensdauer von 2000 Stunden haben und somit besser als die der Konkurrenzfirma Glühlang sind. Daraufhin startet die Firma Glühlang eine Versuchsreihe mit 10 hauseigenen Lampen von denen 5 eine Lebensdauer von mehr als 2000 Stunden erreichen, während es bei denen der Firma Lichtox 8 von 10 Lampen sind. Auf Basis dieser Datenlage dementiert Glühlang die Werbung von Lichtox.



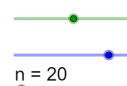
**Welche der beiden Firmen hat Recht?**

**Aufgabe 1:** Finden Sie jeweils Argumente, die für und gegen die Gültigkeit der Werbung der Firma Lichtox sprechen.

Lösungshinweise:  
Darstellung der Daten:



$$\chi^2 = 1.98$$



	A	B	C	D
1	Beobachtet	M1	M2	Summe
2	N1	2.01	5.01	7.01
3	N2	7.99	4.99	12.99
4	Summe	10	10	20
5				
6	Erwartet	M1	M2	Summe
7	N1	3.51	3.51	7.01
8	N2	6.49	6.49	12.99
9	Summe	10	10	20
10				
11	Diff. std.	M1	M2	Summe
12	N1	0.64	0.64	1.28
13	N2	0.35	0.35	0.69
14	Summe	0.99	0.99	1.98
15				
16				
17				

Pro Werbung:

- Es erreichen absolut und relativ mehr Glühlampen der Firma Lichtox die versprochene Lebensdauer.
- Das bspw. anhand eines Einheitsquadrates bestimmte Assoziationsmaß  $d$  kann mit  $d = 0,3$  als relativ groß betrachtet werden
- Die Versuchsreihe der Firma Glühlang inkl. der Stichprobengröße kann angezweifelt werden
- ...

Contra Werbung:

- Es erreichen nicht alle Lampen der Firma Lichtox eine Brenndauer von 2000 Stunden.
- Der absolute Unterschied von 3 zwischen den Produkten der beiden Hersteller hinsichtlich des Erreichens bzw. Nicht-Erreichens der Brenndauer ist eher gering.
- Es kann mittels Chi-Quadrat-Test kein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Erreichen der Lebensdauer und der Herstellermarke festgestellt werden. Es ist daher nicht auszuschließen, dass der Unterschied allein auf Basis des Zufalls zustande kommt.

**Aufgabe 2:** Unter der nachfolgenden Adresse finden Sie ein Applet, in dem ein fiktiver Datensatz und das zugehörige Einheitsquadrat samt eines Assoziationsmaßes  $d$  dargestellt wird:

<https://www.geogebra.org/m/k2gfyesk>



Der Datensatz kann mithilfe der Schieberegler verändert werden (Grün: relative Verteilung zwischen M1 und M2; Blau: relative Verteilung zwischen N1 und N2; Grau: Stichprobengröße). In Abhängigkeit dieser Parameter werden die erwarteten Häufigkeiten, die Differenzen sowie der zugehörige  $\chi^2_{emp}$ -Wert bestimmt.

Wie wirken sich die Parameter auf die Beurteilung des Zusammenhangs zwischen den Merkmalen M und N aus? Beschreiben Sie die Auswirkungen der Parameter zunächst allgemein und ziehen Sie anschließend Schlüsse für den Versuch mit den Glühlampen.

Lösungshinweise:

- Mit steigender Stichprobengröße steigt der  $\chi^2_{emp}$ -Wert, sodass mit größeren Stichproben eher signifikante Ergebnisse produziert werden können. Folglich könnte ein signifikantes Ergebnis dadurch erzeugt werden, dass die Versuchsreihe mit mehr Glühlampen durchgeführt wird.
- Nimmt das Assoziationsmaß  $d$  den Wert 0 an, so bleibt der  $\chi^2_{emp}$ -Wert stets bei 0. Bestehen also keinerlei Unterschiede in den Beobachtungen, so wird kein signifikanter Zusammenhang festgestellt.
- Je größer das Assoziationsmaß  $d$  ist, desto größer ist der  $\chi^2_{emp}$ -Wert, sie können daher ähnlich interpretiert werden. Je größer diese Werte sind, desto bedeutsamer erscheint der festgestellte Unterschied. Sie können also genutzt werden, um den Unterschied zwischen den Glühlampen der beiden Hersteller zu quantifizieren.
- Bei einer sehr geringen Anzahl an Beobachtungen von M1 oder M2 (für sehr große bzw. sehr kleine Werte des grünen Schiebereglers) ist der  $\chi^2_{emp}$ -Wert mit einer relativ geringen Zahl belegt. Es sollte folglich darauf Wert gelegt werden, dass Lampen beider Hersteller vertreten sind und idealerweise alle möglichen Fälle auch beobachtet werden.

**Aufgabe 3:** Recherchieren Sie, welche Anforderungen und Grenzen mit dem Chi-Quadrat-Test einhergehen. Wie sollte eine Versuchsreihe geplant und ausgewertet werden, um möglichst objektiv zu prüfen, ob die Brenndauer mit dem Merkmal Hersteller zusammenhängt. Beziehen Sie sich hierbei auch auf die Erkenntnisse aus Aufgabe 2.

Lösungshinweise:

- 1) Die Daten sollen nominal skaliert sein. Das stellt in der Regel kein Problem dar, werden aber bspw. metrische Daten erhoben (bspw. die Brenndauer in Stunden) dann führt das u.U. zu vielen Kategorien mit zu wenigen Beobachtungen.
- 2) Unabhängigkeit der Beobachtungen/Messungen. Ist bspw. eine Charge an Glühlampen deutlich stärker fehlerbehaftet („Montagsbirnen“), so kann die Unabhängigkeit der Beobachtungen in Frage gestellt werden. Es wäre daher ratsam die Glühlampen möglichst unabhängig von weiteren Variablen (bspw. Produktionsdatum, -ort) zu wählen.
- 3) Jede Merkmalskombination sollte mindestens fünf-mal beobachtet werden. Die Stichprobe sollte entsprechend groß gewählt werden, dass alle Merkmalskombinationen ausreichend oft auftreten. Ist dies nicht möglich, so sollte die Nutzung des Chi-Quadrat-Tests in Frage gestellt werden. Allerdings kann

weiterhin der  $\chi^2$ -Wert als Assoziationsmaß herangezogen werden. Die oben beschriebene Versuchsreihe eignet sich also nur bedingt für die Anwendung des Chi-Quadrat-Tests.

- Bedeutsam für die Versuchsreihe ist die Wahl einer passenden Stichprobengröße. Bei einer zu kleinen Stichprobe wird u.U. die Anforderung der 5 Beobachtungen einer Merkmalskombination nicht erfüllt. Bei einer zu großen Stichprobe besteht die Gefahr, dass der Chi-Quadrat-Test auch bei kleinen Unterschieden eine Signifikanz anzeigt. Daher sollten stets auch deskriptive Maße bei der Diskussion der Daten herangezogen werden.

